

**BANQUE D'ÉPREUVES DUT-BTS  
-SESSION 2015-**

**ÉPREUVE DE MÉCANIQUE**

**CODE ÉPREUVE : 970**

**CALCULATRICE INTERDITE**

**DURÉE DE L'ÉPREUVE: 2H30**

## Exercice 1

On donne une vue en coupe d'un réducteur à engrenage conique en **Figure 1**.

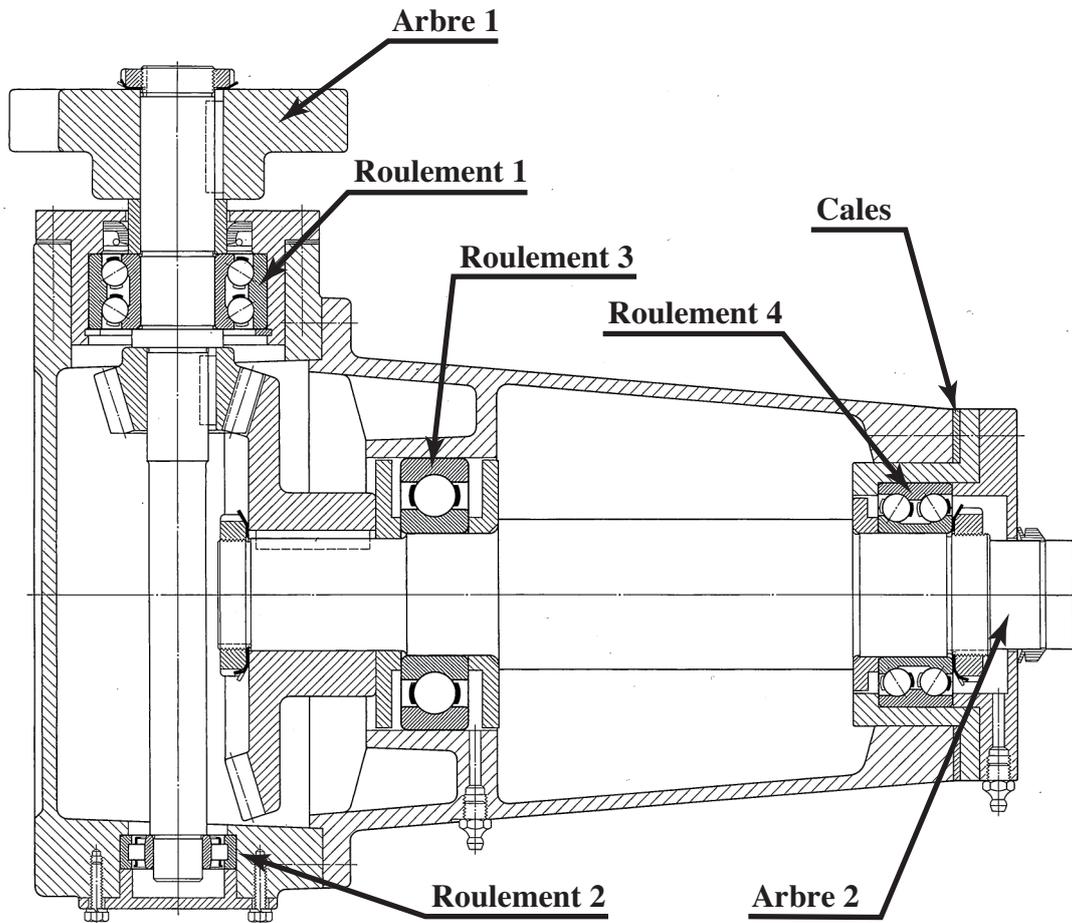


Figure 1 – Réducteur à engrenage conique

- (A) En fonctionnement en réducteur, l'arbre 2 est l'arbre d'entrée du mécanisme et reçoit la puissance motrice.
- (B) Les roulements 1 et 4 admettent un angle de rotulage de  $1$  à  $2^\circ$ .
- (C) Dans le cas où l'arbre 1 ne serait soumis de l'extérieur qu'à un couple pur, le roulement 1 ne subirait aucune charge axiale.
- (D) Les cales repérées en **Figure 1** permettent un réglage axial de l'arbre 2.
- (E) Les bagues intérieures des roulements 3 et 4 sont ajustées serrées sur l'arbre 2.

## Exercice 2

- (A) Un acier inoxydable est un acier faiblement allié.
- (B) L'acier de désignation 30 CrNiMo 8 ne permet pas la trempe en profondeur des pièces massives.

- (C) Le grenailage est un procédé de traitement de surface permettant d'augmenter la dureté au voisinage de la surface.
- (D) Une fonte est parfaitement adaptée aux déformations à froid : forgeage, laminage...
- (E) La ductilité est l'aptitude qu'a un matériau à se déformer plastiquement sans se rompre.

### Exercice 3

On s'intéresse au bras de robot de la **Figure 2**. Le système est composé d'un bras **1** articulé par rapport au bâti. Un moto-réducteur, non étudié et non représenté, permet d'animer le bras par un système vis-écrou. On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- Le bâti **0** est muni du repère  $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .
- Le bras **1** est lié au bâti **0** par une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  telle que  $\vec{OA} = a\vec{x}_0$ . Le repère lié  $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est tel que  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$  et on note  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ . On notera également  $\vec{AC} = c\vec{x}_1$ .
- Le corps/stator du moteur **2** est lié au bâti **0** par une liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_0)$  telle que  $\vec{OB} = b\vec{y}_0$ . Le repère lié  $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est tel que  $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$  et on note  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ .
- La vis **3**, entraînée par l'arbre de sortie du moto-réducteur, est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_2)$  par rapport à **2** et en liaison hélicoïdale d'axe  $(B, \vec{x}_2)$  avec l'écrou **4**. On note  $\vec{BC} = \lambda\vec{x}_2$  où  $\lambda$  est une longueur qui varie au cours du mouvement.
- Enfin, l'écrou **4** est liée au bras **1** par une liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z}_0)$ .

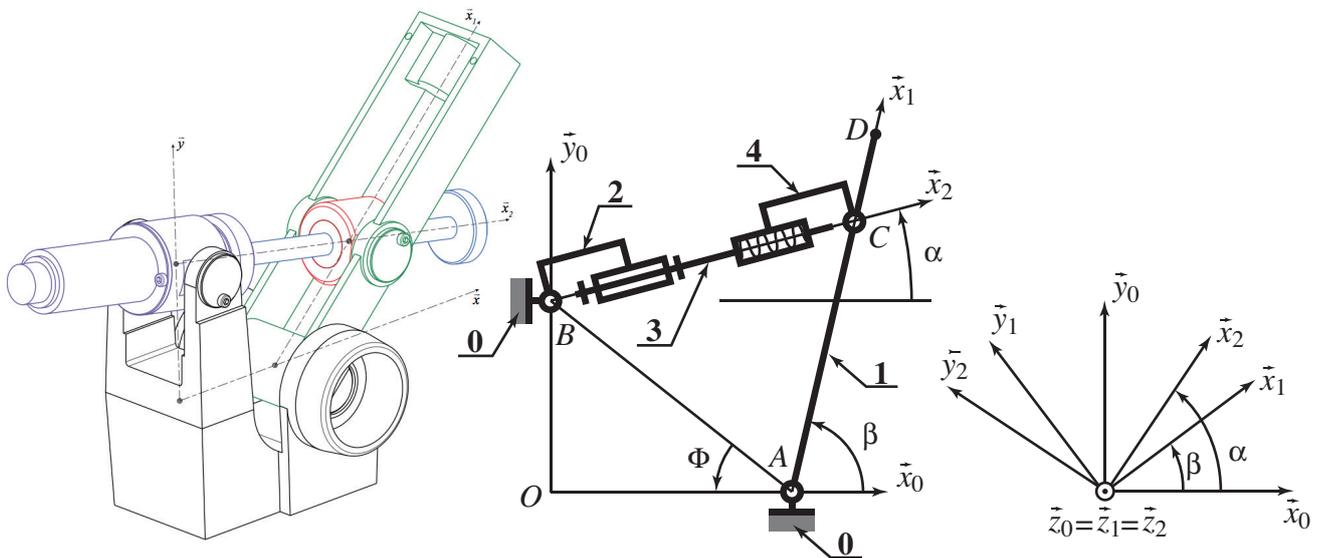


Figure 2 – Bras de robot

(A) Par une fermeture de chaîne géométrique, on montre que :

$$\begin{cases} c \cos \beta - \lambda \cos \alpha = 0 \\ c \sin \beta - \lambda \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

(B) Le lien entre la vitesse de rotation du bras,  $\dot{\beta}$ , et la vitesse de translation relative de l'écrou par rapport à la vis,  $\dot{\lambda}$ , peut s'écrire :

$$\dot{\beta} = -\dot{\lambda} \frac{\lambda}{cA \sin(\beta + \phi)}$$

avec  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $\tan \phi = \frac{b}{a}$ .

(C) La vitesse d'entraînement du point  $C$  lié à  $\mathcal{R}_2$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est égale à :

$$\vec{V}(C \in \mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_0) = \dot{\lambda} \vec{x}_2$$

(D) La vitesse du point  $D$  de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est déterminée graphiquement à partir de  $\vec{V}(C, \mathcal{R}_4 / \mathcal{R}_2)$  comme représenté en **Figure 3**.

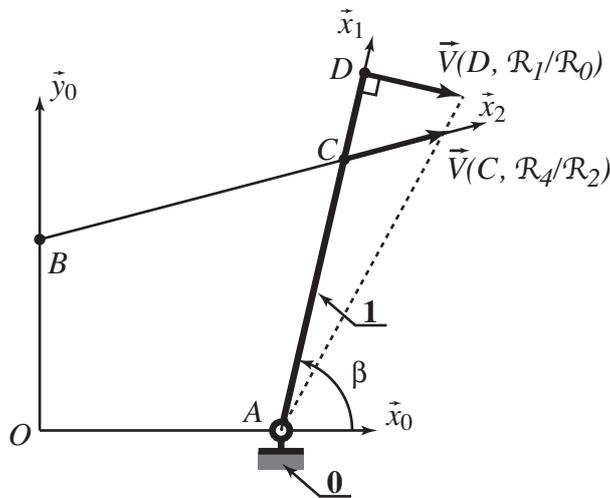


Figure 3 – Vitesses aux points  $C$  et  $D$  du bras **1**

(E) Par construction graphique sur la **Figure 4**, on montre que  $\vec{V}(D, \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) = 30 \text{ cm/s}$ .

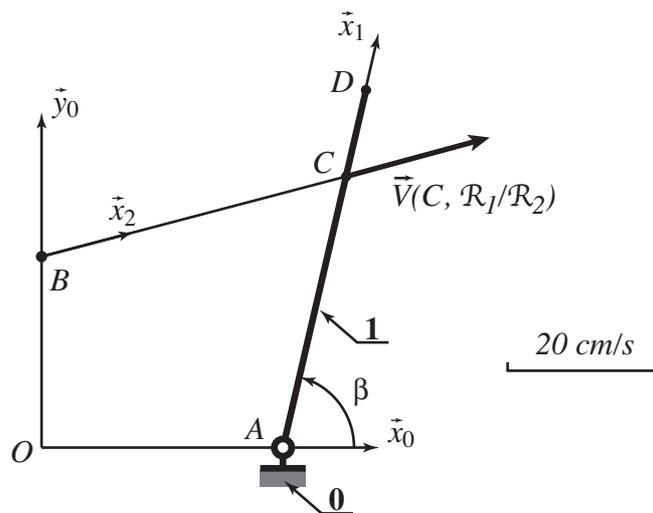


Figure 4 – Détermination graphique de la vitesse du point  $D$  par rapport au bâti

## Exercice 4

On reprend le bras de robot de l'exercice précédent et on s'intéresse maintenant à la modélisation des liaisons.

- (A) Le torseur des actions mécaniques transmissibles dans la liaison hélicoïdale entre **4** et **3** est de la forme :

$$\{\mathcal{T}_{(3 \rightarrow 4)}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{34} & L_{34} \\ Y_{34} & M_{34} \\ Z_{34} & N_{34} \end{array} \right\}_{(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

avec  $X_{34} = pL_{34}$  avec  $p$  le pas réduit de la liaison hélicoïdale qui vaut  $p = r \tan i$  où  $r$  est le rayon moyen du filet de la vis et  $i$  son angle d'hélice.

- (B) Le degré de mobilité cinématique du mécanisme, tel qu'il est modélisé sur la **Figure 2** et considéré en 3D, est égal à 1.
- (C) Le mécanisme, tel qu'il est modélisé sur la **Figure 2** et considéré en 3D, a un degré d'hyperstatisme égal à 3.
- (D) Le remplacement de la liaison pivot en  $B$  par une liaison rotule de centre  $B$  rend le mécanisme, tel qu'il est modélisé sur la **Figure 2**, isostatique.
- (E) Si la schématisation des liaisons du mécanisme conduit à un degré d'hyperstatisme de  $h$ , cela signifie que  $h$  inconnues de liaison ne pourront être déterminées explicitement en fonction des données du problème.

## Exercice 5

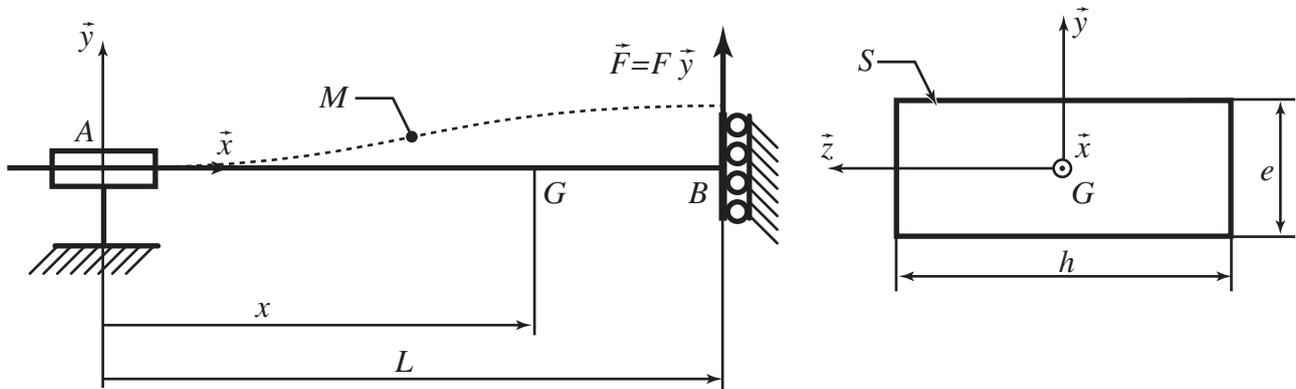


Figure 5 – Poutre de section rectangulaire en flexion

On s'intéresse à la poutre de longueur  $L$  et de section constante  $S$  modélisée sur la **Figure 5**. Celle-ci est en liaison pivot glissante avec le bâti à son extrémité  $A$  et en appui plan en son extrémité  $B$  avec le bâti. Elle est soumise à un glisseur  $\vec{F} = F\vec{y}$  en  $B$ . La déformée, volontairement amplifiée, est représentée en traits pointillés et présente un point d'inflexion en son point milieu  $M$ . On se place en 2D et on donne les torseurs des actions mécaniques de liaison sur la poutre en  $A$  et  $B$  :

$$\{\mathcal{T}_{(bti \rightarrow A)}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & - \\ Y_A & - \\ - & M_A \end{array} \right\}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{(1 \rightarrow B)}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_B & - \\ 0 & - \\ - & M_B \end{array} \right\}_{(B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Le matériau est supposé homogène, élastique et isotrope, de module d'Young  $E$ . On se place dans le cadre de la théorie d'Euler-Bernoulli. Classiquement, dans le cadre de la théorie des poutres, on prendra comme convention que le torseur de cohésion à l'abscisse  $x$  représente les actions mécaniques intérieures exercées par la partie aval ( $> x$ ) sur la partie amont ( $< x$ ). La poutre est libre de contrainte initialement, c'est-à-dire pour  $F = 0$ .

(A) Le problème de poutre en 2D ainsi posé est hyperstatique de degré 2.

(B) Le moment fléchissant selon  $\vec{z}$  dans la poutre pour  $0 < x < L$  est :

$$M_{fz}(x) = Fx - M_A$$

(C) On montre que :

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

(D) Le moment quadratique de la section  $S$  par rapport à l'axe  $(G, \vec{z})$  est :

$$I = \frac{eh^3}{12}$$

(E) La flèche suivant  $\vec{y}$  au point B est égale à :

$$\vec{v}(L) = \frac{FL^3}{48EI} \vec{y}$$

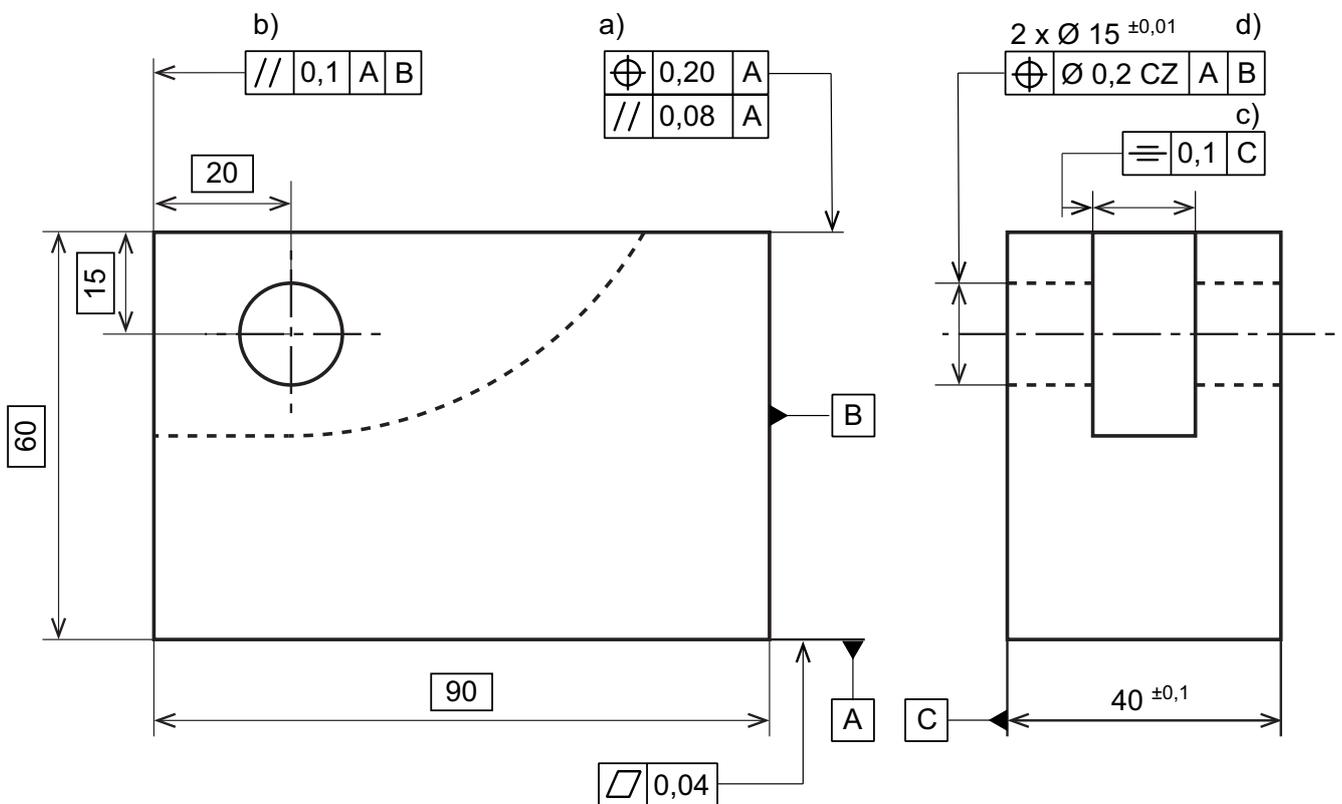


Figure 6 – Dessin de définition partiel de la pièce

## Exercice 6

On donne le dessin de définition partiel de la pièce représentée en **Figure 6**.

- (A) On s'intéresse aux deux spécifications repérées par a) en **Figure 6**. La spécification géométrique de localisation implique automatiquement la vérification de la spécification de parallélisme située juste en dessous.
- (B) Toujours concernant les deux spécifications repérées par a), la référence spécifiée  $\boxed{A}$  est le plan tangent extérieur matière minimisant les écarts avec la surface réputée plane désignée.
- (C) La spécification repérée par b) est équivalente à  $\boxed{\parallel 0.1 B}$ .
- (D) Pour la spécification repérée par c), l'élément tolérancé est le plan réputé médian de la rainure. Celui-ci doit être compris entre deux plans parallèles distants de 0.1 et disposés symétriquement par rapport à l'élément de référence  $\boxed{C}$ .
- (E) Pour la spécification repérée par d), le système de références spécifiées  $\boxed{A B}$  est équivalent au système de références spécifiées  $\boxed{B A}$ .

## Exercice 7

On s'intéresse au barrage en béton de la **Figure 7** qui permet de contenir un certain volume d'eau (masse volumique  $\rho_e$ ). Il repose, du fait de son poids propre (masse volumique  $\rho_b$ ), sur un massif et ses dimensions sont caractérisées dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$  par les données  $a$ ,  $b$ ,  $h$  et dans la direction  $\vec{z}$  par une largeur  $L$ . On néglige la pression atmosphérique et on suppose que l'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g\vec{y}$ .

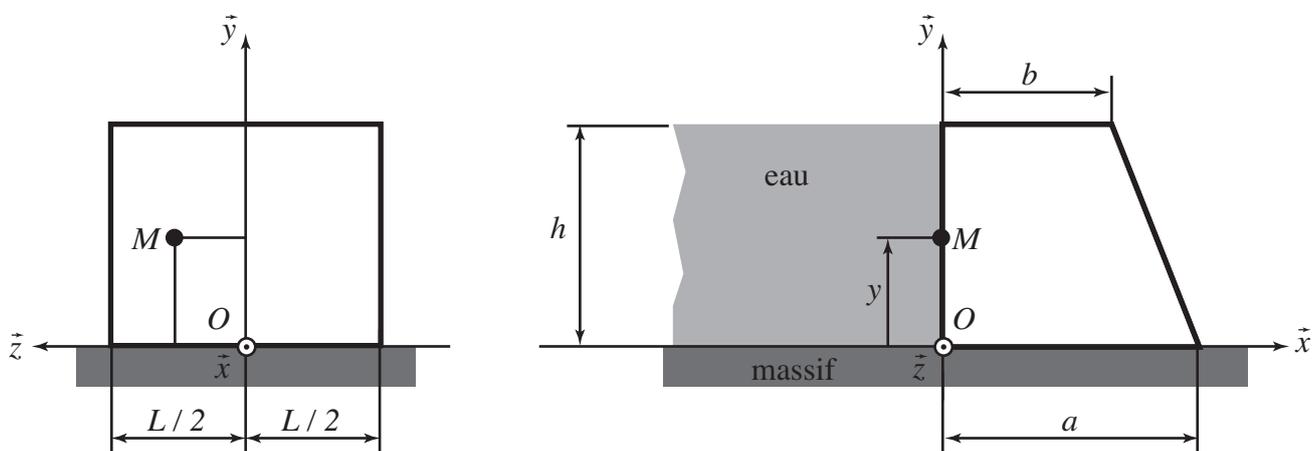


Figure 7 – Barrage

- (A) L'effort surfacique exercé par l'eau sur la paroi du barrage au point  $M$  tel que  $\vec{OM} = y\vec{y} + z\vec{z}$  est :

$$\vec{p}(M) = \rho_e g (h - y) \vec{x}$$

- (B) La résultante du torseur des actions mécaniques exercées par l'eau sur la paroi du barrage est :

$$\vec{R}(eau \rightarrow paroi) = \frac{1}{2} \rho_e g L h^2 \vec{x}$$

- (C) Le moment du torseur des actions mécaniques exercées par l'eau sur la paroi du barrage, exprimé en  $O$ , est :

$$\vec{M}(O, eau \rightarrow paroi) = \frac{1}{3} \rho_e g L h^3 \vec{z}$$

- (D) L'axe central du torseur précédent est l'ensemble des points de l'espace où le moment est orthogonal à la résultante.
- (E) L'axe central du torseur précédent est horizontal et passe par le point  $C$  défini par  $\vec{OC} = h/2 \vec{y}$ .

## Exercice 8

On reprend le barrage de l'exercice précédent mais on s'intéresse maintenant au contact de celui-ci avec le massif. On suppose que ce contact se fait avec frottement et que le coefficient de frottement correspondant est  $f$ .

- (A) La réaction normale  $\vec{N} = N \vec{y}$  exercée par le massif sur le barrage est telle que :

$$N = \rho_b g L \frac{a+b}{4} h$$

- (B) La réaction normale  $\vec{N} = N \vec{y}$  exercée par le massif sur le barrage est telle que :

$$N = \rho_b g L \frac{a+b}{2} h$$

- (C) L'effort tangentiel  $\vec{T} = T \vec{y}$  exercé par le massif sur le barrage est tel que :

$$|T| \leq f|N|$$

- (D) À la limite du glissement, l'effort tangentiel  $\vec{T} = T \vec{x}$  exercé par le massif sur le barrage est tel que :

$$T = -fN$$

- (E) Si  $b = a$ , la condition de non basculement de l'ouvrage sous les actions mécaniques exercées par l'eau s'écrit :

$$h \leq a$$

## Exercice 9

- (A) La vitesse périphérique (vitesse relative de l'arbre par rapport à l'alésage au niveau du rayon de l'arbre) admissible par un joint à lèvres peut atteindre 10 m/s.
- (B) Une rugosité  $R_a$  de l'ordre de 2 est nécessaire sur l'arbre en contact avec la lèvre du joint.
- (C) La vitesse périphérique (vitesse relative de l'arbre et de l'alésage au niveau du coussinet) admissible par un coussinet en bronze ne dépasse pas 0,1 m/s.
- (D) Un joint torique ne peut être utilisé que pour réaliser une étanchéité statique.
- (E) Si la pression augmente de manière trop importante, un joint torique risque l'extrusion.

## Exercice 10

La **Figure 8** représente un arbre de module d'Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ . Cet arbre est modélisé par une poutre droite de longueur  $L$ , sollicitée par un couple  $C_A \vec{x}$  à son extrémité  $A$  et un couple  $C_B \vec{x}$  au niveau de la section  $B$ , tandis que la poutre est encastree à son autre extrémité  $C$ . La section  $S$  de la poutre est une couronne de diamètre intérieur  $d$  et de diamètre extérieur  $D$ . Classiquement, dans le cadre de la théorie des poutres, on prendra comme convention que le torseur de cohésion à l'abscisse  $x$  représente les actions mécaniques intérieures exercées par la partie aval ( $> x$ ) sur la partie amont ( $< x$ ).

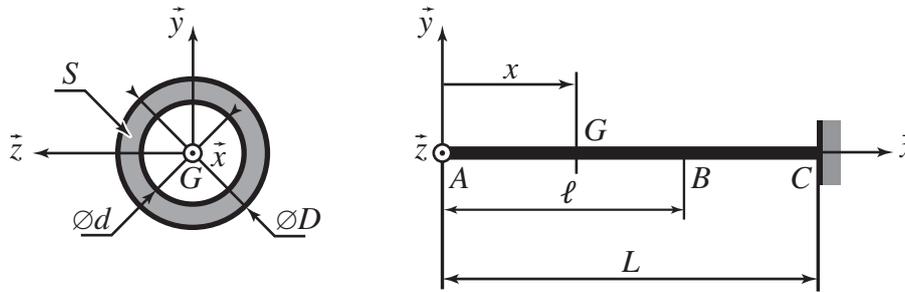


Figure 8 – Arbre en torsion

- (A) Le module de cisaillement  $G$  du matériau peut s'exprimer en fonction du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  par l'expression suivante :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- (B) Le module de cisaillement  $G$  d'un acier usuel est de l'ordre de 80 MPa.  
 (C) Le moment quadratique  $I$  de la section  $S$  par rapport à l'axe  $(G, \vec{x})$  est :

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$

- (D) Le vecteur rotation de la section située en  $A$  est :

$$\vec{\alpha}_A = \frac{1}{GI}(LC_A + (L - \ell)C_B)\vec{x}$$

- (E) Si  $C_A = 0$ , le moment de torsion dans le tronçon de poutre  $0 < x < \ell$  est simplement égal à  $C_B$ .

## Exercice 11

On reprend l'exercice précédent et on s'intéresse maintenant à des aspects dynamiques. On suppose l'existence d'inerties en rotation  $J_A$  et  $J_B$  uniquement au niveau des sections  $A$  et  $B$ , tandis que la poutre est toujours encastree au bâti au niveau de la section  $C$ . Les vecteurs rotations des sections  $A$  et  $B$  sont notés  $\vec{\alpha}_A = \alpha_A \vec{x}$  et  $\vec{\alpha}_B = \alpha_B \vec{x}$  et les deux tronçons de la poutre se comportent comme des ressorts élastiques de torsion de raideurs  $k_1$  et  $k_2$  (cf. **Figure 9**). Le référentiel  $R_g$  lié au bâti est supposé galiléen. Les termes dynamiques liés à l'inertie en rotation de la poutre sont négligés par rapport à ceux liés aux inerties  $J_A$  et  $J_B$ . On suppose qu'aucun couple extérieur ne s'applique sur le système ( $C_A = C_B = 0$  par rapport à l'exercice précédent).

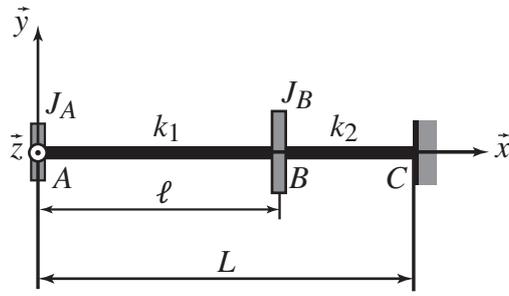


Figure 9 – Dynamique en rotation

- (A) L'énergie cinétique de l'ensemble  $E$ , constitué des deux inerties et de la poutre, dans son mouvement par rapport à  $R_g$  est :

$$T(E/R_g) = \frac{1}{2}J_A\alpha_A\ddot{\alpha}_A + \frac{1}{2}J_B\alpha_B\ddot{\alpha}_B$$

- (B) La puissance intérieure de l'ensemble  $E$  est :

$$\mathcal{P}(E \leftrightarrow E) = \frac{1}{2}k_1(\alpha_A - \alpha_B)^2 + \frac{1}{2}k_2\alpha_B^2$$

- (C) Les équations du mouvement qui régissent le comportement de l'ensemble  $E$  sont :

$$\begin{aligned} J_A\ddot{\alpha}_A + k_1\alpha_A - k_1\alpha_B &= 0 \\ J_B\ddot{\alpha}_B - k_1\alpha_A + (k_1 + k_2)\alpha_B &= 0 \end{aligned}$$

- (D) On suppose pour les deux derniers items de cet exercice que  $J_B = 0$ . La raideur  $k_{eq}$  équivalente aux deux raideurs  $k_1$  et  $k_2$  est telle que :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

- (E) Si on suppose en outre que  $\ell = L/2$ , la pulsation propres  $\omega$  de l'ensemble est :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2J_A}}$$

## Exercice 12

On reprend l'exercice précédent et on s'intéresse maintenant au cas où le système est soumis à une chargement extérieur. Cette fois, on se place dans le cas particulier où  $J_A = J_B = J$  et, pour simplifier, on suppose  $\ell/L \ll 1$  (donc  $k_2 \gg k_1$ ). On suppose aussi à nouveau que l'on exerce sur le système un couple extérieur en A, noté  $\vec{C}_A = C_A\vec{x}$ , et un couple extérieur en B noté  $\vec{C}_B = C_B\vec{x}$ .

- (A) La puissance développée par le couple extérieur exercé en A sur l'ensemble  $E$ , en mouvement par rapport à  $R_g$ , est :

$$\mathcal{P}(C_A \rightarrow E/R_g) = -C_A\dot{\alpha}_A$$

(B) La puissance développée par le couple extérieur exercée en  $B$  sur l'ensemble  $E$ , en mouvement par rapport à  $R_g$ , est :

$$\mathcal{P}(C_B \rightarrow E/R_g) = C_B(\dot{\alpha}_A - \dot{\alpha}_B)$$

(C) La puissance développée par le couple extérieur exercée en  $B$  sur l'ensemble  $E$ , en mouvement par rapport à  $R_g$ , est :

$$\mathcal{P}(C_B \rightarrow E/R_g) = C_B \dot{\alpha}_B$$

(D) L'hypothèse  $k_2 \gg k_1$  implique que :

$$J\ddot{\alpha}_A \approx C_A$$

(E) L'hypothèse  $k_2 \gg k_1$  implique que :

$$J\ddot{\alpha}_B + k_2\alpha_B = C_B$$